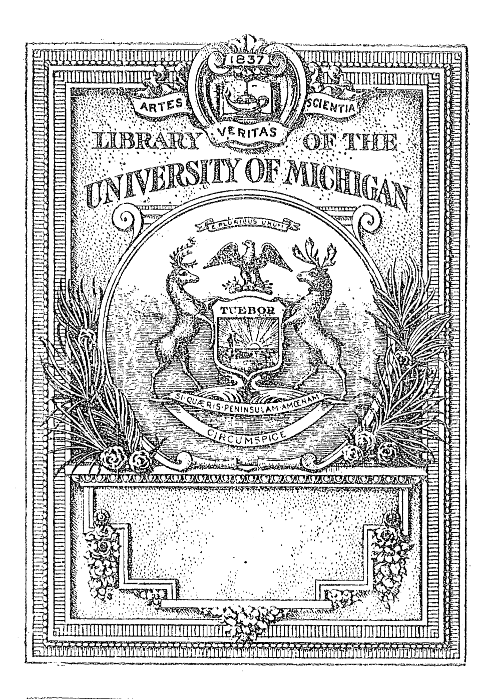

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE





Die

Nichteuklidische Geometrie

vom Alterthum bis zur Gegenwart.

Eine historisch-kritische Studie

von

Dr. A. Karagiannides.

Berlin.
In Commission bei **Mayer & Müller.**
1893.



Einleitendes.

Es ist vielleicht von Interesse, wenn ich in der vorliegenden Arbeit eine Behandlung der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie versuche.

Es besteht nämlich unter den Mathematikern ein gewisser Zweifel, ein Bedenken, ob es sich thatsächlich unter der Benennung, „Nicht-Euklidische Geometrie," um etwas Neues und Gewichtiges handele. Dieser Zweifel wird leider noch grösser, wenn man hier und da liest und hört, dass unter den sogenannten Nicht-Euklidikern Eintracht und Einverständniss keineswegs existirt.

Unter solchen Umständen dürfte es also als wünschenswerth erscheinen, einen historisch-kritischen Bericht über den Ausgangspunkt und die Grundlagen der betr. Geometrie zu haben. Nun könnte jemand einwenden, dass, wenn die Nicht-Euklidiker selbst in betr. ihres Lehrgegenstandes nicht einig sind, dann jede weitere Discussion darüber überhaupt entbehrlich sei.

Ich glaube indessen, dass dieser Schluss aus wissenschaftlichen Gründen nicht ganz berechtigt ist, und umso weniger, als man daran denkt, das Gebäude der neuen Functionentheorie auf angeblichen Resultaten der sog. Nicht-Euklidischen Geometrie aufzubauen.

Mein Thema beanspruchte allerdings das Abstäuben und Durchstudiren einer Litteratur von ungefähr 2000 Jahren. Allein ich habe mich bemüht, trotz der umfangreichen Litteratur dieser Arbeit keine zu grosse Ausdehnung zu geben. Ich habe daher immer nur das Wesentlichste berührt und kritisirt.

Die Behandlung dieses Themas, welches ja eigentlich abstracter Natur ist, habe ich jedoch so gestaltet, dass sie auf Verständniss bei jedem Mathematiker hoffen darf.

Der Zweck dieser Schrift ist nicht nur den Gegenstand zu behandeln, sondern die Sachlage der Geometrie allgemein ins Licht zu bringen und vielleicht dann andere tüchtigere Mathematiker anzuregen. Es ist nämlich nicht würdig der math. Wissenschaft, die sich doch den Namen „exakt“ beilegt, dass die Mathematiker so viele verschiedene Meinungen über ihr Wesen haben.

Der leichten Uebersicht wegen habe ich die vorliegende Arbeit in drei Abschnitte getheilt. In dem ersten soll über die Nicht-Euklidiker im Alterthum gesprochen werden, von denen merkwürdigerweise ihre Nachfolger in der späteren Zeit keine Ahnung zu haben scheinen. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den Nicht-Euklidikern der neueren Zeit, und der dritte mit denen der Gegenwart. Als Schluss folgt eine kurze Recapitulation.

Die Nicht-Euklidiker im Alterthum.

In den sehr interessanten und wichtigen Commentaren des Proclus (ed. Friedlein p. 68 ff) lernen wir vom Auftreten des Eukleides in der Wissenschaft folgendes:

„Nicht viel jünger aber als diese (Schüler oder Anhänger Platons) ist Eukleides, der die Elemente zusammenstellte, vieles von Eudoxus Herrührende zu einem ganzen ordnete und vieles von Theätetus Begonnene zu Ende führte; überdies das von den Vorgängern leichthin Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise stützte. Es lebte aber dieser Mann unter dem ersten der Ptolemäer. Archimedes nämlich gedenkt beiläufig auch in seinem ersten Buche des Eukleides und man sagt ferner, Ptolomäus habe ihn einmal gefragt, ob es nicht bei geometrischen Dingen einen abgekürzteren Weg als durch die Elemente gebe; er aber ertheilte den Bescheid, zur Geometrie hin gebe es keinen Fusssteig für Könige. Er ist somit jünger als die Schüler Platons, älter als Eratosthenes und Archimedes; denn diese sind Zeitgenossen, wie Eratosthenes angiebt. Seiner wissenschaftlichen Stellung nach ist er Platoniker und dieser Philosophie angehörig; daher er denn auch als Endziel seines ganzen Elementarwerkes die Construction

1*

der sogenannten platonischen Körper hinstellte". Die Uebersetzung ist bis auf einige Punkte aus M. Cantor's Vorlesungen (Bd. 1) entnommen.

Ferner aber — und das dürfte das Wichtigste sein — folgt aus diesem kurzen Citate: Eukleides ist seiner wissenschaftlichen Stellung nach Platoniker und dieser philosophischen Richtung angehörig, dass Eukleides also sowohl mit den Schriften des Platon, als auch natürlich mit denen des Aristoteles bekannt war, als er seine „Elemente" verfasste. Er wusste also ganz genau den Unterschied zwischen ἀνυπόθετος - und ἐνυπόθετος - Wissenschaft. Er wusste Bescheid, über das, was man unter den Worten; Entstehung allgemeiner Begriffe, Erkenntnisstheorie, Methodenlehre, psychologische und logische Denkgesetze, analytische und synthetische Urtheile u. s. w. u. s. w. versteht.

Er war sich also in seinem Scharfsinn über das Verhältniss der Mathematik zur Philosophie klar. Es dürfte sehr fraglich sein, ob er, ohne dieses Verhältniss genau zu kennen, seine wunderbar musterhaften „Elemente" hätte verfassen können. Auch bei den übrigen bedeutendsten Mathematikern finden wir ja die Philosophie mit der Mathematik vereinigt, und welche Gegensätze finden wir dabei zu den Leistungen nicht philosophisch geschulter Mathematiker! Man braucht nur Namen wie Cartesius, oder Newton, oder Leibniz u. s. w. zu erwähnen.

Nachdem Eukleides Alles was hier und da zerstreut war, in seinen „Elementen" in strenge wissenschaftliche Harmonie und Ordnung gebracht hatte, kann es im Grunde genommen nicht verwundern, dass bald darauf ihm ein genialer Archimedes und ein grosser Apollonius von Pergä folgt.

Apollonius nun war der erste, welcher die in den Elementen vorkommenden Axiome zu beweisen versuchte. Nach Geminos scheint er mit unbekannten Mitteln das Bekannte klar machen zu wollen. (ἀπὸ ἀγνωστοτέρων μέσων τὰ γνώριμα πᾶσιν κατασκευάζειν ἐπεχείρησε. Proclus p. 183). Apollonius studirte in Alexandria Mathematik bei den Schülern Euklid's und hat sich auch — wohl bemerkt — mit Sternkunde beschäftigt. (Susemihl, Geschichte der griech. Litter. Bd. I p. 749. M. Cantor, Vorlesungen). Er scheint also mit der Philosophie, etwa mit Leistungen von Platon oder Aristoteles leider nicht recht bekannt zu sein. Vielleicht würde er, wenn er sich mit der Philosophie eingehend beschäftigt hätte, wie dies Jahrhunderte später Cartesius gethan hat, der wirkliche Urheber der analytischen Geometrie sein (Zeuthen, Die Kegelschnitte im Alterthum). Er hat wirklich Grosses in der Mathematik geleistet, aber er würde mit seinem Geist noch weit grösseres haben leisten können. Er hätte lieber seine kostbare Zeit für andere wichtigere mathematische Fragen sparen sollen, anstatt beweisen zu wollen, dass „Grössen, welche ein und derselben Dritten gleich sind, auch einander gleich sind.“ (τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα).

Archimedes scheint kein besonderes Gewicht, — was man übrigens bestreitet (M. Cantor, Vorlesungen) — auf den Unterschied zwischen Definition (ὅρος), Postulat (Αἴτημα) und Axiom (Κοινὴ ἔννοια) gelegt zu haben, aber er hat sich auch nicht mit Spitzfindigkeiten beschäftigt. Und wenn nicht sein genialer Kopf von barbarischer Hand gefallen wäre, so würde vielleicht die Mathematik eine andere Richtung eingeschlagen haben.

Wenn Geminos, welcher nicht nur als reiner Mathematiker, sondern auch — wohlbemerkt — als Verfasser einer Einleitung in die Astronomie (Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινό-

μενα) auftritt, mit vollem Recht dem Apollonius den erwähnten Vorwurf macht, so vergisst er dabei selbst die Aristotelische Definition des Postulats, (vergl. Proclus) und macht nun dem Eukleides den Vorwurf, dass er das fünfte Postulat (welches fast alle späteren Nicht-Euklidiker als Axiom bezeichnen) unter die drei ersten Postulate eingereihet hat, mit der einfachen Bemerkung: ἀποδείξεως δεόμενον; und wir wissen leider nicht, ob er denn dafür einen Beweis gegeben hat. (Proclus p. 183 ff).

Nun sind wir aber mit Geminos zu dem beberühmten fünften Postulate gelangt, zur eigentlichen Quelle der sogenannten Nichteuklidischen Geometrie, welche die Nicht-Euklidiker, beiläufig bemerkt, ganz poetisch, wie Homer seine Ἀθηνᾶ, mit vielen Epithetis zu schmücken pflegen. Da wir also zu der bedeutendsten Quelle angekommen sind, müssen wir dieselbe einer genauen Beobachtung unterziehen.

Herr Susemihl bemerkt in seiner sehr interessanten Litteraturgeschichte Bd. I, p. 708 ff. (vergl. auch Cantor's Vorlesungen) betreffs der „Elemente" des Euklides sehr richtig, was allgemein ein vielgebrauchtes Lehrbuch in Jahrhunderten ohne Druckerei zu erfahren hat: Zusätze, Verkürzungen, Redactionsänderungen, ja Fehler sind nichts Seltenes.

Die ältere Ausgabe von Peyrard und die letzte von Herrn Heiberg sind in Bezug auf historisch-kritische Untersuchungen die besten. Wir haben natürlich die von Herrn Heiberg vor uns, welche von der peinlichsten wissenschaftlichen Sorgfalt zeugt.

Derjenige, welcher diese Ausgabe vor sich hat, die Reihenfolge der Ὅροι, Αἰτήματα und Κοιναὶ ἔννοιαι genau übersieht und sie im Ganzen psychologisch, logisch, morphologisch und mathematisch — aber, wohl

bemerkt, nicht pyrrhonisch — combinirt, für den bedarf es natürlich keiner weiteren Auseinandersetzungen.

Man glaubt, Eukleides war nicht oberflächlich, als er nach 22 anderen Definitionen als letzte die Definition der Parallelen angeführt hatte. Ebenso war er nicht oberflächlich, als er das malträtirte fünfte Postulat nach drei und zwanzig Ὅροι und vier Αἰτήματα einreihte. (Ich mache hier ausdrücklich aufmerksam auf den Unterschied zwischen Ὅροι, Αἰτήματα und Κοιναὶ ἔννοιαι oder Ἀξιώματα vergl. Proclus p. 76, 180 ff).

Wie wir also gesehen haben, hat Geminos keinen Beweis für das fünfte Postulat angegeben, indem er bloss auf das: μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις (Proclus p. 192) verweist.

Ein Anderer aber versuchte das Postulat zu beweisen, und zwar durch Beweismittel, welche Eukleides selbst angegeben hatte. Allein Proclus (p. 368) macht schon auf τὴν τῆς δείξεως ἀσθένειαν bei ihm aufmerksam. Dieser Andere ist der berühmte Astronom, der Schöpfer, kann man sagen, der Grundlagen der Ebenen und Sphärischen Trigonometrie: Ptolemäus.

Wir bemerken gleich hier, wie die ersten Einwände gegen das fünfte Postulat astronomisch-geodätischer Herkunft sind.

Nun ist es vielleicht sehr interessant und lehrreich, sich damit bekannt zu machen, wie die Griechen im Alterthum einen gewissen Unterschied zwischen Parallelen und asymptotischen geraden Linien zu machen pflegten. Um nicht weitläufig zu werden, empfehle ich, bei Gelegenheit hierüber die Proclusausgabe von Friedlein nachzulesen. Denn, das dort mit Scharfsinn Auseinandergesetzte und Erläuterte, würde hier nicht besser wiedergegeben werden können.

Jeder, welcher sich bemüht, eine neue Geometrie oder überhaupt etwas Neues zu schaffen, der muss selbstverständlich zuvörderst mit der einschlägigen Litteratur Bekanntschaft und Bündniss schliessen. Wenn dieses immer der Fall wäre, so würde vielleicht das Gebäude der neueren Mathematik nicht wie ein Thurm von Babel aussehen. Fast jeder Mathematiker der neueren Zeit pflegt namentlich in seiner Muttersprache eigene Benennungen — über vielleicht unberechtigte Personal-Benennungen der neuesten Zeit lasse ich lieber anderen das Wort — und eigene Bezeichnungen u. s. w. für denselben mathematischen Gegenstand zu haben. Und dies geschieht im höchsten Grade in der Geometrie und in der neuen Functionentheorie.

Ich bitte also über die betreffenden allgemeinen Ansichten von Parallelen im Alterthum Proclus zu lesen. Es ist immer zweckmässig, wenn es sich um etwas Zweifelhaftes und Bestrittenes handelt, die originalen Quellen selbst zu studiren. Besondere Schriften über Parallelen haben Ptolemäus und andere griechische tüchtige Mathematiker geschrieben, aber dieselben sind leider entweder verloren gegangen oder in Alexandria durch den von Barbarenhand verursachten Brand in Flammen aufgegangen. —

Nun gilt es, den Faden der Nicht-Euklidischen Entwickelung fest in der Hand zu halten, bis er uns durch mehrere Jahrhunderte hindurch, die meist von Barbarismus und Dunkelheit durchdrungen sind, zuerst wieder auf Gauss führt. Ich habe die in der Zwischenzeit entstandene Litteratur wohl durchgesehen, allein dabei keinen Nicht-Euklidiker herausfinden können. Ein Nicht-Euklidiker, Herr Beltrami, bemerkt (Rendiconti della R. Academia dei Lincei 1889), dass ein gewisser Hieronymus Saccheri im Jahre 1733 einen Versuch

zur Begründung einer Nicht-Euklidischen Geometrie gemacht habe, aber in seinen Schlüssen nicht correct gewesen sei.

Während ich nun einen nichteuklidischen Mathematiker in der erwähnten Zeit nicht angetroffen habe, so sei es mir dennoch gestattet, in einem Exkurs die Ansichten und Auffassungen des Unendlichen vom Alterthum an bis zur Gegenwart darzustellen.

Das Unendliche spielt eben, kann man sagen, die Hauptrolle des heutigen Nicht-Euklidischen Dramas. Nun möchte vielleicht jemand hierauf die Bemerkung machen, dass man in der Zeit des Eukleides das Drama bei einer ganz einfachen Lampe schrieb, während man heute dasselbe bei einer electrischen Lampe schreibt! Man will eben vor dem historisch-kritischen Tribunale untersuchen, ob man wirklich unter electrischer Beleuchtung ein besseres und einheitlicheres Drama schreiben kann!

Hier werden wir natürlich von dem mathematischen Begriff des Unendlichen sprechen, und dass wir dabei auch den Begriff der Continuität in Anspruch nehmen werden, ist selbstredend. Ferner darf man „Unendlich“ nicht mit „Unbegrenzt“ verwechseln. —

Die Griechen im Alterthum machten einen gewissen Unterschied zwischen νοητόν, ἐπιστητόν, διανοητόν; αἰσθητόν, δοξαστόν, εἰκαστόν. Und es verhalten sich διανοητὰ zu ἐπιστητὰ und νοητὰ wie εἰκαστὰ zu αἰσθητὰ und δοξαστά. Und μαθηματικὰ sind διανοητά. Kriterium in der Mathematik im Allgemeinen sind nicht τὰ αἰσθητὰ sondern ἡ ψυχή. Eine mit gewisser Elasticität ausgerüstete Seele ist nun hoffentlich im Stande, diese Speculationen, welche meistens von Platon herrühren, gründlich aufzufassen. —

Der Abstand zweier sehr weit entfernter Oerter ist durch das blosse Gesicht unerreichbar, unendlich gross,

wie man gewöhnlich sagt, durch das starke und correcte Telescop oder durch vernünftige Augen der Phantasie aber wohl erreichbar. Man kann sich also auf einer geraden Linie einen beweglichen Punct denken, welcher nach einer Richtung hin jede, noch so weit gedachte Entfernung erreicht, so dass jede Station, um anschaulicher zu sprechen, welche für den Punct früher unendlich weit schien, nach der Erreichung für denselben sich im Endlichen, wie der Ausgangspunkt befindet. Es giebt also auf derselben geraden Linie keinen unerreichbaren, unendlichen Punct. Nur muss natürlich die Phantasie nicht nur starke und elastische Flügel haben, um ein derartiges Intervall zu durchlaufen, sondern auch starke und scharfe Augen der Vernunft; denn nur durch solche kann sie das Zurückgelegte übersehen, messen und begreifen. Oder mit anderen Worten, die Phantasie ist ein unendliches und unbegrenztes Papier, auf welches die Seele mit den Augen der Vernunft und mit der Feder des Nachdenkens die Welterscheinungen zeichnet. Nun aber, um wieder auf unsere Hauptaufgabe zurückzukommen, kann man mit Eukleides behaupten: Parallele Geraden sind diejenigen gerade Linien, welche auf derselben unendlichen und unbegrenzten Ebene liegen und nirgends zusammentreffen; und im Zusammenhange mit den ὅροι bei Eukleides definirt man das fünfte Postulat genau so wie jener selbst, weil es eben ein Postulat (Αἴτημα) (vergl. Def. des Postulats) ist, und weil die ὅροι unentbehrlich für die Grundlagen der Geometrie sind. — Wenn aber zwei Geraden irgendwo sich schneiden, so bleibt der Schnittpunkt immer bestehen, auch wenn er nach einer bestimmten Richtung hin sich fortbewegt. Und nun kann man weiter vielleicht die Frage aufstellen: Man errichtet auf einer geraden Linie 2 Senkrechte; dieselben

sind natürlich einander parallel. Diese Parallelen begrenzen auf der gegebenen Geraden eine Strecke. Nimmt man dieselbe nun als Durchmesser eines Kreises, so wird dieser natürlich von den beiden Parallelen berührt. Nun ziehe man weiter von einem Punkt ausserhalb des Kreises die beiden Tangenten desselben und die die Berührungspunkte verbindende Sehne und lasse man die Sehne sich immer näher und näher, also continuierlich an den Durchmesser heranrücken. Dann, sagen fast alle Mathematiker, müsse die Sehne einmal auf den Durchmesser fallen und somit die zwei Parallelen sich in einem unendlichen fernen Punkt schneiden. Diese Behauptung ist nicht ganz berechtigt: Plötzlich kann die Sehne auf den Durchmesser fallen, jedoch niemals continuierlich*). In einer abnehmenden geometrischen Reihe werden die Glieder immer kleiner und kleiner; niemals aber kann ein Glied dieser Reihe gleich Null werden. Aehnliches geschieht auch in den Naturwissenschaften mit der Materie, und solche Vorkommnisse sind nicht Paradoxa sondern ganz natürlich: Die Natur ist im Allgemeinen Continuität. Jedermann kennt die geistreichen Probleme des Zenon und Archimedes: Achilleus und Schildkröte das eine, Sandrechnung das andere. Die Null ist in der Mathematik gewissermassen das eigenthümlichste Paradoxon, weil es Null ist, und nicht die Continuität nach gross und klein.

Herr G. Cantor hat in Mathem. Annalen Bd. 21, p. 545 ff. einen Unterschied zwischen Uneigentlich-Unendlich und Eigentlich-Unendlich hervorgehoben, welchen man längst stillschweigend veraussetzte.

---

*) Diese Thatsache bestätigen übrigens auch die irrationalen Grössen und im Allgemeinen die Infinitesimalrechnung. — Man kann daher stetige (continuierliche) und unstetige (discontinuierliche) geom. Constructionen unterscheiden.

Das Uneigentlich-Unendliche ist die über alle Grenzen hinaus wachsende (oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmende, aber stets endlich bleibende Grösse. Das Eigentlich-Unendliche ist das Absolut-Unendliche.

Das Uneigentlich-Unendliche stellt sich als ein veränderliches Endliches dar; das Eigentlich-Unendliche tritt als ein durchaus bestimmtes Unendliches auf. Viele Thatsachen der mathematischen Wissenschaften lassen das Eigentlich-Unendliche zu. Aber wie? Als eine Façon de parler. Man lernt mit Beweis sehr früh in der Schule, dass Division durch 0 absolut unmöglich ist. Der Student der Mathematik lernt aber ohne Beweis in der Universität, dass Division durch 0 das Eigentlich-Unendliche d. h. das Façondeparler-Unendliche bedeutet. Und daraus fliessen nun alle Paradoxien, von welchen Bolzano in einem Büchlein (Paradoxien des Unendlichen) eine Blumenlese gegeben hat.

Ein Argument von Aristoteles gegen die Wirklichkeit des Eigentlich-Unendlichen besteht in der Behauptung, dass das Endliche vom Eigentlich-Unendlichen, wenn dieses existirte, aufgehoben und zerstört werden würde. Unter der Leitung des Eigentlich-Unendlichen hat Gauss einen Brief, wie wir unten sehen werden, geschrieben.

Die Behauptung, dass wir das Uneigentlich-Unendliche nicht im Stande sind aufzufassen, weil, wie man gewöhnlich sagt, unser Verstand „endlich" ist, ist vollkommen widersinnig. Ja unser Leben ist endlich, aber das menschliche Denken ist Uneigentlich-unendlich! Wäre unser Denken endlich, so würde es keine Rede von beständigen Entdeckungen und Erweiterungen der verschiedenen Gebiete der Wissenschaften von Geschlecht zu Geschlecht geben. Das eigentliche Unendliche ist eigentlich gar nicht fasslich, weil es

eine ganz willkürliche Façon de Parler ist. Das ist, was wir mit Recht nicht verstehen können. Das menschliche Denken ist unbegrenzt — abgesehen vom stationären oder abnehmenden individuellen Denken — wachsend. Und derjenige der Sterblichen, welcher beweisen kann oder will, dass das menschliche Denken einmal und dann für immer stationär und steril werden wird, der hat damit auch die Definition des Eigentlich-Unendlichen angegeben, der hat schon das Eigentlich-Unendliche erreicht!

Man sagt gewöhnlich, das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit. Man muss aber einen präcisen Unterschied machen zwischen gezügelter Freiheit und ungezügelter Freiheit, d. h. zwischen vernünftiger Freiheit und unvernünftiger Freiheit.

Die Nicht-Euklidiker der neueren Zeit.

In Deutschland pflegt man Gauss als den Schöpfer der Nicht-Euklidischen Geometrie zu bezeichnen.

Gauss hat schon als Jüngling, wie man erzählt und wie man aus einem Briefe an seinen Studiengenossen und innigen Freund Wolfgang Bolyai ersieht, mit den Grundlagen der Geometrie sich beschäftigt. In dem erwähnten Brief (1799) heisst es:

„Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren . . . „Es wäre jawohl möglich, dass so entfernt man auch die drei Eckpunkte des Dreiecks im Raume von einander annehme, doch der Inhalt immer unter einer gegebenen Grenze wäre . . .“ (Schering, Festrede).

Ueber Nicht-Euklidische Geometrie hat Gauss in seinem späteren Alter Nichts veröffentlicht. Nur hie und

da findet man unbestimmte Andeutungen in Briefen an Freunde.

Im Jahre 1816 (20 April) machte er eine merkwürdige, prophetische und scharfe Recension (Werke Bd. 4, p. 364 ff). Da heisst es: „Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallel-linien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahre war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen". Diese Worte des grossen Deutschen klingen beinahe wie die von Proclus p. 375. Nicht weniger ungünstig für die Nicht-Euklidiker lautet eine spätere (1822, 28 October l. c. p. 368) Recension von Gauss.

Im Jahre 1829 schreibt Gauss an Bessel, „Ueber ein Thema, dass bei mir schon fast 40 Jahre alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie. . . . Meine Ueberzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, womöglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird das auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der

Gegner scheue (?!), wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte. Seltsam ist es aber, dass ausser der bekannten Lücke in Euklid's Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat, und nie ausfüllen wird, es noch einen anderen Mangel in derselben giebt . . . .“ (es handelt sich um die Definition der Ebene, aber Gauss giebt leider keine solche).

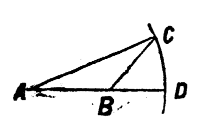
Am 12 Juli 1831 schreibt Gauss einen Brief an seinen intimen Freund Schumacher. Dieser Brief ist beachtenswerth. Er ist auf eine ungeduldige Aufforderung Schumachers hin erfolgt, welcher in drei Briefen Gauss gereizt hatte. Der erwähnte Brief (Gauss und Schumacher, Briefwechsel Bd. 2, p. 268 ff) lautet:

„Was die Parallellinien betrifft, würde ich Ihnen mein Urtheil sehr gern schon auf Ihren ersten Brief geschrieben haben, wenn ich nicht hätte voraussetzen müssen, dass Ihnen mit demselben ohne vollständige Entwicklungen wenig gedient sein würde. Zu solchen vollständigen Entwicklungen, wenn sie wahrhaft überzeugend sein sollen, würden aber vielleicht bogenlange Auseinandersetzungen in Erwiderung auf das, was Sie in wenigen Zeilen im Grunde nur angedeutet haben, nöthig sein, zu welchen Auseinandersetzungen mir aber gegenwärtig die erforderliche Geistesheiterkeit fehlt (sic). Um Ihnen jedoch meinen guten Willen zu bethätigen, will ich folgendes hersetzen:

„Die eigentliche Pointe richten Sie sogleich auf jedes Dreieck; allein Sie würden im Grunde Ihr nehmliches Raisonnement anwenden, wenn Sie das Geschäft zuerst auf den einfachsten Fall anwendeten und den Satz aufstellten:

1) In jedem Dreieck, dessen eine Seite endlich, die zweite und folglich die dritte hingegen unendlich ist, ist die Summe der beiden Winkel an jener $= 180^0$

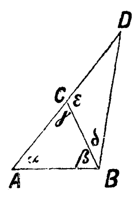
„**Beweis nach ihrer Manier:**



Man denke sich ein Dreieck $A\,B\,C$, dessen Ecke C sehr weit oder, wie man gewöhnlich sagt, unendlich weit ist, und die Seite $A\,B$ ebenso sehr weit verlängert. (Schum.)

„Der Kreisbogen $C\,D$ ist ebenso gut das Maass des Winkels $C\,A\,D$ als $C\,B\,D$, weil bei einem Kreise von unendlichem Halbmesser eine endliche Verrückung des Mitlelpunkts für o zu achten ist. Also $C\,A\,D = C\,B\,D$, $C\,A\,D + C\,B\,A = C\,B\,D + C\,B\,A = 180$.

„Das übrige ergiebt sich leicht von selbst. Es ist nähmlich nach diesem Lehrsatze:



$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \delta &= 180 \\ 180 &= \varepsilon + \delta \\ \gamma + \varepsilon &= 180 \end{aligned}\right\}$$ Also addendo $$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

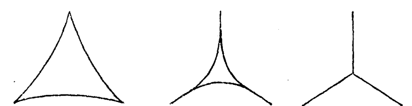
— Man sieht, dass leider diese Schlüsse nicht alle richtig sind. Ist wissenschaftlich überzeugend ‚wenn man sagt C „sehr weit“ oder „unendlich weit“ ist und $A\,B$ „für 0 zu achten ist.“ „Also $C\,A\,D = C\,B\,D$ u. s. w.?“ Ist es nicht eine willkürliche Façon de Parler?

Wenn man $\varepsilon + \delta = 180$ setzt, und eine gerade Linie von D nach der Mitte von $B\,C$ zieht und dieselben Schlüsse anwendet, so sieht man leicht, was in dem beliebigen geradlinigen Dreiecke $A\,B\,C$ geschieht u. s. w.

Gauss schreibt ferner, „Was nun aber Ihren Beweis für 1) betrifft, so protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einen Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die Nicht-Euklidische Geometrie

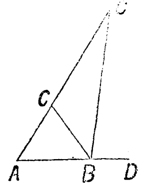
durchaus nichts widersprechendes, wenn gleich diejenigen viele Ergebnisse derselben anfangs für Paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der früheren Gewöhnung die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten."

„In der Nicht-Euklidischen Geometrie giebt es gar keine ähnliche Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von $^2/_3$ R, sondern auch nach Maassgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. Es ist daher schon an sich widersprechend, ein solches Dreieck durch ein kleineres z e i c h n e n zu wollen, man kann es im Grunde nur b e z e i c h n e n. Die Bezeichnung des unendlichen Dreiecks in diesem Sinne wäre am Ende:

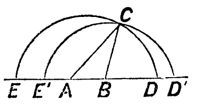


„In der Euklidischen Geometrie giebt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, dies ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die dies nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie, aber wie gesagt nach meiner Ueberzeugung ist dies blosse Selbsttäuschung.

„Für den fraglichen Fall nun durchaus nichts widersprechendes darin, dass wenn die Puncte A, B und die Richtung AC gegeben sind, während C ohne Beschränkung wachsen kann, dass dann obgleich so DBC dem DAC immer näher kommt, doch der Unterschied nie unter eine gewisse endliche Differenz heruntergebracht werden könne.



„Ihr Hinziehen des Bogens CD macht allerdings den Schluss um viel captiöser, allein wenn man, was Sie nur angedeutet haben, klar entwickeln will, so müsste es so lauten:



„Es ist $CAD : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'}$

und indem AC ins unendliche wächst, kommen CD und CD' einerseits und ECD, $E'CD'$ andererseits der Wahrheit immer näher.

„Beides ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht wahr, wenn man darunter versteht, dass ihre geometrischen Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen, wie man will. In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$,

$$= \frac{1}{2} \pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right)$$

wo k eine constante ist, von der wir durch Erfahrung wissen, dass sie gegen alles durch uns messbare ungeheuer gross sein muss. In Euklid's Geometrie wird sie unendlich.

„In der Bildersprache des Unendlichen würde man also sagen müssen, dass die Peripherien zweier unendlichen Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Grösse verschiedeu sind, selbst um eine Grösse verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältniss hat. Hierin ist aber nichts widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.

„Sie sehen, dass hier in der That der Fragepunkt

unmittelbar an die Metaphysik streift (sic). Doch nunmehro genug."

Schumacher antwortet bald darauf (l. c.) und sagt mit einer gewissen Schüchternheit oder Furcht, „Ich kann nicht sagen, dass er (der Brief von Gauss) mich schon überzeugt hätte." Man kann aber offen sagen, dass der betreffende Brief keine Ueberzeugung enthält. Den zweiten Brief an Schumacher konnte ich leider nicht benutzen, da ich vergebens wiederholt in den beiden hiesigen Bibliotheken den fünften Band des Briefwechsels bestellte. Einer von den Nicht-Euklidikern jedoch sagt in seinen Vorlesungen, dass Gauss sich in diesem Brief „sehr beifällig über die Untersuchungen von Lobatchefsky äussert." Dieser Brief enthält also ausser diesem Beifall weiter nichts. Aus diesem Grunde wende ich mich nun sofort zu den Untersuchungen von Lobatchefsky.

Lobatchefsky hat seine Untersuchungen auch in deutscher und französischer Sprache erscheinen lassen.

Im Jahre 1840 verbreitete er in Deutschland eine Schrift unter dem Titel „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien." Da erzählt er uns, dass er einige Unvollkommenheiten in der Geometrie fand, welche diese Wissenschaft zum Vorwärts verhindern. Dies ist: „die wichtige Lücke in der Theorie der Parallelen, welche auszufüllen, alle Anstrengungen der Mathematiker bis jetzt vergeblich waren." „Die Bemühungen Legendre's haben zu dieser Theorie nichts hinzugefügt, indem er genöthigt war den einzigen strengen Gang zu verlassen, sich auf einen Seitenweg zu wenden und zu Hülfssätzen seine Zuflucht zu nehmen, welche er sich unbegründeter Weise bemüht als nothwendige Axiome darzustellen." Hier sieht man, dass der Nicht-

Euklidiker Lobatchefsky von Legendre nichts wissen will*).

Weiter erzählt uns Lobatchefsky, dass er in russischer Sprache früher schon mehrere Abhandlungen geschrieben habe. Und um uns „nicht zu ermüden," wie er sagt, bringt er 15 Sätze ohne Beweis! Und nun kommt der 16 te Satz, welcher lautet:

„Alle geraden Linien, welche in einer Ebene von einem Punkte auslaufen, können mit Bezug auf eine gegebene gerade Linie in derselben Ebene in zwei Klassen getheilt werden, und zwar in schneidende und nicht-schneidende. Die Grenzlinie der einen und anderen Klasse jener Linien wird der gegebenen Linie parallel genannt.

„Es sei vom Punkte A auf die Linie $B\,C$ der Perpendikel $A\,D$ gefällt, auf welchem wieder $A\,E$ senkrecht errichtet sein soll. Im rechten Winkel $E\,A\,D$ werden entweder alle geraden Linien, welche vom Punkte A ausgehen, die Linie $C\,D$ treffen, wie z. B. $A\,F$, oder einige derselben werden, ähnlich dem Perpendikel $A\,E$ die Linie $D\,C$ nicht treffen. In der **Ungewissheit**, ob der Perpendikel $A\,E$ die einzige Linie sei, welche mit $D\,C$ nicht zusammentrifft, wollen wir annehmen, es sei möglich, dass es noch andere Linien z. B. $A\,G$ gäbe, welche $D\,C$ nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag. Bei dem Uebergange von den schneidenden Linien $A\,F$ zu den nicht schneidenden $A\,G$, muss man auf eine Linie $A\,H$ treffen parallel mit $D\,C$,

---

*) Legendre (Mém. de Paris 1833) hat bekanntlich durch wiederholte Anwendung des Satzes XVII, I bei Eukleides mit Berücksichtigung der Congruenz bewiesen, dass „die Summe der Winkel im geradlinigen Dreiecke nicht grösser und nicht kleiner sein kann, als zwei Rechte." Er ist also zu einer Ungleichung gelangt.

eine Grenzlinie, auf deren einer Seite alle Linien $A\ G$ die $D\ C$ nicht treffen, während auf der anderen Seite jede gerade Linie $A\ F$ die Linie $D\ C$ schneidet. Der Winkel $H\ A\ D$ zwischen der Parallele $H\ A$ und dem Perpendikel $A\ D$ heisst Parallel-winkel (Winkel des Parallellismus), diesen werden wir hier durch $\pi(p)$ bezeichnen für $A\ D = p$."

Hier sei das Märchen von den Lobatchefsky'schen Parallelen unterbrochen und mit Gewissheit bemerkt, dass Lobatchefsky leider mit offenbarer Ungewissheit durch Perpendikeln und Senkrechte in seinem steuerlosen Nicht-Euklidischen Aerostat aufsteigt. Wenn man den Scheinbeweisschlüssen dieses 16ten Satzes folgt, so sieht man, dass die Ebene als eine begrenzte einfach zusammenhängende Fläche von Lobatchefsky stillschweigend aufgefasst wird. Eine solche Ebenenvorstellung hatte man bekanntlich schon in der Epoche von Homer; denn damals betrachtete man die Welt als eine Scheibe. Sollte etwa die Odysseische Irrfahrt eine Wiederholung in der Lobatchefky'schen Irrfahrt auf seinen Parallelen gefunden haben?!

Eine spätere Arbeit von Lobatchefsky findet man in französischer Sprache unter dem Titel: Pangéométrie, Kasan 1855. Aus dieser Arbeit, in welcher Lobatchefsky auf sein deutsches Büchlein immer verweist, seien noch folgende Behauptungen erwähnt:

„Je définis le plan comme le lieu géométrique des intersections de sphères égals décrites autour de deux points fixes comme centres. Enfin je définis la ligne droite comme le lieu géométrique des intersections de cercles égaux situés tous dans un même plan et décrites de deux points fixes de ce plan comme centres. Ces définitions du plan et de la ligne droite acceptées, toute la théorie des plans et des droites perpendiculaires

peut être exposée et demontrée avec beaucoup de simplicité et de briéveté".

Bevor wir uns von der simplicité und briéveté überzeugen, sei bemerkt, dass Lobatchefsky keine Definition von Point, Lieu géométrique, Sphère et Cercle angiebt. Er steht nämlich, ohne es zu wissen, auf euklidischem Boden und baut darauf eine nichteuklidische Géométrie! Führen wir ein Beispiel seiner „Simplicité" und „Briéveté" an!

„Les équations:

$$\sin A \cdot \tang \cdot \pi (a) = \sin B \tang \cdot \pi (b)$$

$$1 - \cos \pi (b) \cos \pi (c) \cos A = \frac{\sin \pi (b) \sin \pi (c)}{\sin \pi (a)}$$

$$\cos A + \cos B \cdot \cos C = \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin \pi (a)}$$

$$\cot A \cdot \sin C \cdot \sin \pi (b) + \cos C = \frac{\cos \pi (b)}{\cos \pi (a)}$$

expriment les dépendances entre les côtés et les angles de tout triangle rectiligne". Wie Lobatchefsky auf der Ebene mit geraden Linien operirend zu diesen Formeln gelangt ist, ist räthselhaft. $\pi (x)$ heisst „Winkel des Parallelismus". Lobatchefsky hat sich viel mit Geodäsie und Astronomie beschäftigt, wie man aus seinen Arbeiten ersieht, aber seine Instrumente waren möglicherweise nicht vollkommen correct und exact. —

Wir hatten schon früher Gelegenheit, eines Studienfreundes von Gauss, des Wolfgang Bolyai, zu gedenken. Von ihm erzählt uns Sartorius v. Waltershausen, ebenfalls ein intimer Freund von Gauss, in seiner Gedächtnissrede auf Gauss, dass er „ein ganz ungewöhnlicher Mensch voll von mathematischen und dichterischen Gaben war." Die

Gedanken Bolyai's über nicht-euklidische Geometrie finden wir in einem Büchlein von Herrn J. Frischauf. („Absolute Geometrie nach Johann Bolyai. Leipzig 1872. Johann war der Sohn Wolfgang Bolyai's, und beide haben sich, wie Herr Frischauf erzählt, mit Nicht-Eukldischer Geometrie beschäftigt.) Es ist eine Wiedergabe dieses Büchleins hier nicht nothwendig, theils, weil fast der ganze Inhalt mit den Ansichten Lobatchefsky's übereinstimmt, theils weil leider Definitionen mit Resultaten in keinem Einklange stehen, theils weil Herrn Frischauf „von Seiten des k. k. österr. Unterrichtsministeriums, die Vorlesungen des Wintersemesters 1871/2, Pangeometrie und Projectivität, als **zu schwierig** beanstandet wurden" — trotz der an unseren Universitäten doch herrschenden Lehr- und Lernfreiheiten, wie Herr Frischauf selber klagend sagt p. VII seines Vorwortes. Ich glaube, Herr Frischauf beschäftigt sich auch mit Astronomie. Eine zweite Schrift von Herrn Frischauf aus dem Jahre 1876 war mir hier in Berlin zu finden unmöglich. Diese Schrift ist nach einem Nicht-Euklidiker „jedoch weniger zu empfehlen."

Ich gehe lieber zu dem Habilitationsvortrag von Riemann: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", vom 10 Juni 1854, über.

Dieser Vortrag war nicht zur Publication bestimmt, er ist erst 1868 aus dem Nachlasse Riemann's von Herrn Dedekind im Bd. 13 der Göttinger Abhandlungen herausgegeben. Wir sehen daher, wie vorsichtig Gauss und Riemann waren, die Grundlagen der Geometrie in eine öffentliche Discussion zu bringen.

Bis jetzt hatten wir mit Nicht-Euklidikern zu thun' welche fast in synthetischer Weise eine Nicht-Euklidische Geometrie zu begründen versuchten. Riemann will nun aber von den bisherigen Nicht-Euklidikern nichts wissen, da er keinen Nicht-Euklidiker erwähnt. Er sagt: „Diese Dunkelheit (das Verhältniss der Voraussetzungen der Geometrie) wird auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchen die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb.“ Riemann will nämlich sowohl den Begriff des Raumes als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als nicht etwas Gegebenes voraussetzen, sondern er will vielmehr den Raum als einen besonderen Fall einer mehrfach ausgedehnten Grösse annehmen. Mit anderen Worten, er will auf rein analytischem Wege die Grundlagen der Geometrie angeben.

Indem Riemann den Begriff einer n-fach ausgedehnten Grösse nur andeutet und in Rücksicht auf Leistungen von Gauss über das Krümmungsmaass einer Fläche, mit kürzester Linie operirend, zur Bestimmung der Maassverhältnisse einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die erforderlichen Bedingungen anführt, bemerkt er, dass die Maassverhältnisse dieser Mannigfaltigkeit nur von dem Werthe des Krümmungsmaases abhängen, und bringt ohne Beweis für den Ausdruck des Linienelementes die Formel:

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \Sigma x^2} \cdot \sqrt{\Sigma d x^2}$$

wo α den Werth des Krümmungsmaasses darstellt.

Alle Andeutungen **Riemann's** bis hierher sind, wie gesagt, rein analytischer Natur. Und nun sagt er: „Zur geometrischen Erläuterung kann die Betrachtung der Flächen mit constantem Krümmungsmaass dienen. Es ist leicht zu sehen, dass sich die Flächen, deren Krümmungsmaass positiv ist, immer auf eine Kugel, deren Radius gleich 1 dividirt durch die Wurzel aus dem Krümmungsmaass ist, wickeln lassen werden; um aber die ganze Mannigfaltigkeit dieser Flächen zu übersehen, gebe man einer derselben die Gestalt einer Kugel und den übrigen die Gestalt von Umdrehungsflächen, welche sie im Aequator berühren. Die Flächen mit grösserem Krümmungsmass, als diese Kugel, werden dann die Kugel von innen berühren und eine Gestalt annehmen, wie der äussere der Axe abgewandte Theil der Oberfläche eines Ringes; sie würden sich auf Zonen von Kugeln mit kleinerem Halbmesser wickeln lassen, aber mehr als einmal herumreichen. Die Flächen mit kleineren positiven Krümmungsmaass wird man erhalten, wenn man aus Kugelflächen mit grösserem Radius ein von zwei grössten Halbkreisen begrenztes Stück ausschneidet und die Schnittlinien zusammenfügt. Die Fläche mit dem Krümmungsmaass Null wird eine auf dem Aequator stehende Cylinderfläche sein; die Flächen mit negativem Krümmungsmaass aber werden diesen Cylinder von aussen berühren und wie die innere der Axe zugewandte Theil der Oberfläche eines Ringes geformt sein. Denkt man sich diese Flächen, als Ort für in ihnen bewegliche Flächenstücke, wie den Raum als Ort für Körper, so sind in allen diesen Flächen die Flächenstücke ohne Dehnung beweglich. Die Flächen mit positivem Krümmungsmaass lassen sich stets so formen, dass die Flächenstücke auch ohne Biegung beliebig bewegt werden können, nämlich zu Kugelflächen, die mit

negativen aber nicht. Ausser dieser Unabhängigkeit der Flächenstücke vom Ort findet bei der Fläche mit dem Krümmungsmass Null auch eine Unabhängigkeit der Richtung vom Ort statt, welche bei den übrigen Flächen nicht stattfindet."

Diese sehr interessanten Aeusserungen Riemann's geben jetzt die Veranlassung, nach Leistungen von anderen Mathematikern, welche sich mit Flächen constanter Krümmung beschäftigt haben, zu suchen.

Bekanntlich hat Gauss in den Disquisitiones generales circa superficies curvas bewiesen, dass bei der Biegung einer Fläche das Maass der Krümmung in jedem Punkte unverändert bleibt. Den Beweis dieses Satzes hat er analytisch geführt. Später hat denselben Satz Minding (Crelle 19 und 20) geometrisch bewiesen. Minding geht aber noch weiter. Er hat nämlich folgenden äusserst wichtigen Satz bewiesen: „Es lassen sich überhaupt zwei Flächen von gleichem unveränderlichem Krümmungsmaass auf einander abwickeln und zwar auf unendlich viele Arten, indem man zwei beliebige Punkte der einen zweien beliebigen der anderen entsprechend setzen kann, wenn nur die Längen kürzester Linien auf der Flächen, zwischen beiden Paaren von Punkten, einander gleich sind. Und ferner, jede Fläche, deren Krümmungsmass k unveränderlich und positiv, lässt sich auf eine Kugel von Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abwickeln.

„Auf jeder Fläche also von unveränderlichem positivem Krümmungsmaasse, zwischen den Seiten und Winkeln eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecke gelten die Formeln der sphärischen Trigonometrie. Ist das Krümmungs-

maass negativ, so gelten dieselben Formeln mit der Aenderung, dass die hyperbolischen Functionen der Seiten an die Stelle der trigonometrischen treten. Sind nämlich a, b, c die Seiten des Dreiecks, A der Gegenwinkel von a und k das constante Krümmungsmaass, so besteht die Gleichung:

$$\cos a\sqrt{k} = \cos b\sqrt{k} \cdot \cos c\sqrt{k} + \sin b\sqrt{k} \cdot \sin c\sqrt{k} \cdot \cos A.$$

Jede Fläche, deren Krümmungsmaass gleich Null, ist eine Biegung der Ebene."

Bemerkung. Minding hat ferner bewiesen, dass auch Flächen von nicht constantem gleichem Krümmungsmaasse sich unter gewissen Bedingungen auf einander abwickeln lassen.

Es ist also einerlei, ob wir unsere Figuren und Constructionen auf einer Fläche constanter Krümmung $\pm k$, oder auf einer Kugel betrachten; wir finden dieselben Resultate. Ebenso einerlei, ob wir unsere Figuren und Constructionen auf einer Fläche von 0ter Krümmung, oder auf einer Ebene betrachten. Die Ebene und die Kugel müssen wir also immer haben.

Was die Ableitung des Begriffs einer n-fach ausgedehnten Grösse oder Mannigfaltigkeit oder eines Raumes von höheren Dimensionen betrifft, seien noch ein paar Worte bemerkt. Riemann sagt (Werke p. 255) „Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer anderen ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im ersten Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit." Diese Rie-

mann'schen Bestimmungsweisen versteht man so; wenn man z. B.

$$y = f(x)$$

hat, wo $f(x)$, pour fixer les idées, stetig und eindeutig ist, so hat man für jeden Werth von x jeden Werth von y; für jede stetige Aenderung von x jede stetige Aenderung von y. Man hat also im Kopfe eine Menge von Zahlen, welche zu x und dann zu y gehören. Diese Zahlen nun entsprechen dem Raume oder erzeugen den Begriff irgend eines Körpers so genau, wie der Traum von Millionen der Wirklichkeit entspricht, sobald man erwacht. Man will nämlich sagen, dass man durch reine Zahlen irgend einen Raumbegriff weder bilden noch sich einbilden kann. Man darf nicht Arithmetik mit Geometrie verwechseln. Die beiden Gebiete helfen sich einander, aber nie erzeugt das eine das andere. Zwei Mächte schliessen für ihre Interessen ein Bündniss, aber sie vertauschen ihr Wesen oder ihre inneren Angelegenheiten nicht!

Riemann's Versuch also, die allgemeinen Begriffe der Geometrie von rein analytischem Standpunkt aus zu begründen, ist verfehlt.

Die Nicht-Euklidiker der Gegenwart.

Obwohl Riemann selbst streng genommen kein ausgesprochener Nicht-Euklidiker ist, so hat dennoch sein Habilitationsvortrag alle Nicht-Euklidiker der Gegenwart zu Untersuchungen veranlasst. Von ihnen seien nur diejenigen in Betracht gezogen, welche offiziell die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie vertreten, und speciell diejenigen, welche auch Anhänger um sich zu sammeln oder anzuziehen scheinen.

Die Nicht-Euklidische Gegenwart eröffnet chronologisch der berühmte Physiker und Physiologe Herr v. Helmholtz. — Herr v. Helmholtz hat im Jahre 1866 als Mitglied des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg einen Vortrag gehalten, über „die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.“ (Wissensch. Abhandl. Bd. 2, p. 610). Er fängt an: „Die Untersuchungen über die Art, wie Localisation im Gesichtsfelde zu Stande kommen, haben den Vortragenden veranlasst, auch über die Ursprünge der allgemeinen Raumanschauung überhaupt nachzudenken.“ Herr v. Helmholtz eröffnet also seinen Vortrag mit Thatsachen, welche an die Wahrnehmungen des Gesichtssinnes anknüpfen. Man glaubt, obwohl unser Gesichtssinn das edelste unter unseren Sinnesorganen ist und unser Erkenntnissvermögen am meisten bereichert, dass wir ihm trotzdem einen unbedingten Glauben und ein unumschränktes Vertrauen nicht immer schenken können. Er einzig und allein, selbst mit Instrumenten bewaffnet, reicht nicht aus, uns die Raumvorstellung oder Raumanschauung zu verschaffen.

Die Erfahrung lehrt und die Psychologie behauptet, dass wir nur da eine vollkommenere und richtigere Idee eines Gegenstandes haben, wo mehrere von unseren Sinnesorganen, wenn nicht alle, Theil nehmen. Ein wahrer Mathematiker, welcher sich mit Raumanschauung beschäftigt, muss nicht nur scharfes Gesicht und scharfes Gefühl, sondern auch eine genaue Vorstellung von Bewegung jeder Art haben. Es ist überdies ein Irrthum, zu glauben, dass Eukleides, welcher nicht nur Mathematiker, sondern auch Philosoph war, die Grundlagen seiner Elemente aus blosser Erfahrung aufgestellt und verfasst hat. Wenn die Mathematik zu denjenigen Wissenschaften gehört, welche auf be-

stimmten Grundlagen ihr Gebäude errichtet, so muss eine andere Wissenschaft existiren, welche diese Grundlagen darbietet und prüft; das ist die Philosophie. (Die „unbeantwortbare Frage" des Hrn. M. Cantor?! Vorles. I, 235).

Dem vorher genannten Helmholtz'schen Vortrag, welcher auch einen gewissen Irrthum enthält, auf welchem der Nicht-Euklidiker Herr Beltrami aufmerksam gemacht hat und Herr v. Helmholtz ausdrücklich in einem Zusatze zugegeben hat (l. c.), sei hier nicht weiter gefolgt. Ich ziehe lieber seine Abhandlung, Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen (Wissensch. Abhandl. Bd. 2, p. 618) in Betracht, welche als Ergänzung des betreffenden Vortrags gilt und welcher die Grundgedanken des Herrn v. Helmholtz enthält. Der Verfasser stimmt für die analytische Behandlung der Raumfrage und er giebt seiner Freude Ausdruck darüber, dass er Riemann „als Gefährten" in dieser Hinsicht habe, „wenn auch durch die Veröffentlichung von Riemann's Untersuchungen die Priorität in Bezug auf eine Reihe eigenen Arbeitsresultate vorweg genommen" sei. Der Unterschied zwischen Riemann und Herrn v. Helmholtz ist nur der, dass Herr v. Helmholtz „die Begründung des den Angelpunkt der ganzen Untersuchung bildenden Satze, wonach das Quadrat des Linienelementes eine homogene Function zweiten Grades von den Differentialien der Coordinaten ist, näher untersucht habe." Und dann kommen „die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen":

I. „Der Raum von n Dimensionen ist eine $n$fach ausgedehnte Grösse, d. h. das bestimmte Einzelne in ihm, der Punkt, ist bestimmbar durch Abmessung irgend welcher, continuirlich und unabhängig von einander veränderlichen Grössen (Coordinaten), deren Anzahl n ist."

Zur Bestimmung eines Punktes brauchen wir also ausgedehnte veränderliche Grössen (Coordinaten); Herr v. Helmholtz giebt aber keine Definition von dem, was ausgedehnte Grössen (Coordinaten) von dem, was $n$fache räumliche Dimension und von dem, was Messen heisst. Riemann hat auch keine bestimmte Definition dafür gegeben; er giebt aber ganz bescheiden zu, dass er „da, wo die Schwierigkeiten mehr in den Begriffen, als in der Construction liegen, wenig geübt ist“ (Werke p. 255).

II. „Die Existenz beweglicher und in sich fester Körper. Zwischen den $2n$ Coordinaten eines jeden Punktpaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle congruenten Punktepaare die gleiche ist.

III. „Es wird vollkommen freie Beweglichkeit der festen Körper vorausgesetzt, d. h. es wird vorausgesetzt dass jeder Punkt desselben an den Ort jedes anderen continuirlich übergehen könne, so weit er nicht durch die Gleichungen, die zwischen ihm und den übrigen Punkten des festen Systems bestehen, zu dem er gehört, gebunden ist.

„Aus dieser Annahme und der unter II. aufgestellten folgt, das zwei in sich feste Punktsysteme A und B, die in einer ersten Lage von A zur Congruenz entsprechender Punkte gebracht werden konnten, auch in jeder anderen Lage von A zur Congruenz aller derselben Punkte, die vorher congruirten, müssen gebracht werden können.

IV. „Endlich müssen wir dem Raume noch eine Eigenschaft beilegen, die der Monodromie der Functionen einer complexen Grösse analog ist. Wenn ein fester Körper sich um n-1 seiner Punkte dreht, und diese so gewählt sind, dass seine Stellung nur noch von

einer unabhängigen veränderlichen abhängt, so führt die Drehung ohne Umkehr schliesslich in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen sind.

„Wir werden sehen, dass diese letztere Eigenschaft des Raumes nicht nothwendig vorhanden zu sein braucht, wenn auch unsere drei ersten Bedingungen erfüllt sind.

„Die gewöhnliche Geometrie setzt diese letzte Eigenschaft stillschweigend voraus, wenn sie den Kreis als geschlossene Linie behandelt; sie setzt die Postulate II und III bei den Congruenzsätzen voraus, da die Existenz in sich fester und übrigens frei beweglicher Körper von den dort angegebenen Eigenschaften die Vorbedingung jeder Congruenz ist. Sie setzt die Continuität und die Dimensionen des Raumes ebenfalls voraus. Es sind diese Sätze hier nur in analytische Form gebracht, da sich ihr Sinn ohne die Anwendung einer solchen Form gar nicht bestimmt aussprechen lässt.“

Lassen wir nun die analytischen Beweise dieser Sätze hier unangeführt; immerhin aber müssen wir mit dem Nicht-Euklidiker Herrn Lindemann (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen Bd. 2 p. 549), bemerken, dass „es überflüssig und unlogisch ist, die einfacheren Grundsätze Euklid's durch umfassendere Folgesätze zu ersetzen“ und mit Herrn S. Lie (Leipziger Berichte 1886 und 1892), dass die vermuthliche Nicht-Nothwendigkeit des Satzes IV gegenstandslos ist. Diese Lie'sche Behauptung hebt der Nicht-Euklidiker, Herr F. Klein, in seinen autogr. Vorlesungen (Nicht-Euklidische Geometrie, Wintersemester 1889—90 p. 275 ff.) ausdrücklich

hervor, indem er sagt, dass „er (Helmholtz) sicher sich geirrt hat.“ Und nun bleibt natürlich Herr v. Helmholtz ganz und gar auf dem Boden der Euklidischen Geometrie; er ist durchaus kein Nicht-Euklidiker. Ich bemerke dabei, dass Herr v. Helmholtz, wie Riemann, über Parallelentheorie nicht spricht.

Die vertheidigende Antwort des Herrn v. Helmholtz (Wissensch. Abhandl. Bd. 2 p. 640) an Herrn Prof. Land, welcher gegen einen vom ersteren später gehaltenen Vortrag Einwände erhoben hatte, ist leider nicht überzeugend. Ich erwähne z. B. der Kürze halber nur folgendes, das gewissermassen der Nerv dieser Antwort ist.

„Wir würden dann, (sobald wir nämlich eine passende Methode gefunden hätten, um zu bestimmen, ob die Entfernungen je zweier Punktpaare einander gleich, d. h. physisch gleichwerthig sind) drei Punkte A, B, C zu suchen, die alle drei gleiche Entfernungen von einander haben, also die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks darstellen. Dann können wir zwei neue Puncte suchen b und c, beide gleich weit von A entfernt, und b mit A und B, c mit A und C in gerader Linie liegend. Alsdann entstände die Frage: Ist das neue Dreieck $A\,b\,c$ auch gleichseitig wie $A\,B\,C$, ist also $b\,c = A\,b = A\,c$? Die Euklidische Geometrie antwortet ja, die sphärische behauptet $b\,c > A\,b$, wenn $A\,b < A\,B$ und die pseudosphärische $b\,c < A\,b$ unter derselben Bedingung. Schon hier kämen die Axiome zur thatsächlichen Entscheidung.“ Aber schon hier zeigt sich eine gewisse Verwechselung von Hypothesen und Thatsachen, geraden Linien und Kreisbogen u. s. w. —

Wir gehen jetzt der Chronologie nach zu den Untersuchungen von Herrn F. Klein über.

Herr F. Klein, mein verehrter Lehrer, hat im Jahre 1871 in den Mathem. Annalen Bd. 4 eine grosse Abhandlung über „Die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“ veröffentlicht. Der Zweck dieser Abhandlung, wie er sagt, ist „die mathematischen Resultate dieser Arbeiten (von Gauss, Lobatschefsky, Bolyai, Riemann und Helmholtz) soweit sie sich auf Parallelentheorie beziehen, in einer neuen anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen.

„Der Weg hierzu führt durch die projectivische Geometrie. Man kann nämlich nach dem Vorgange von Cayley (phil. Transactions t. 149, 1859) eine projectivische Maassbestimmung im Raume construiren, welche eine beliebig anzunehmende Fläche 2ten Grades als sogenannte fundamentale Fläche benutzt. Je nach der Art der von ihr benutzten Fläche 2ten Grades ist nun diese Maassbestimmung ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorieen. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben sie deckt geradezu, wie sich zeigen wird, deren inneres Wesen auf“.

Bis jetzt hatte man, wie wir gesehen haben, versucht, eine Nicht-Euklidische Geometrie entweder direkt und synthetisch von Parallelenbegriffe ausgehend, oder durch rein analytische Raumanschauungen zu begründen. Herr Klein will aber seine Nicht-Euklidische Geometrie durch die projectivische Geometrie und die sog. fundamentale Fläche erzeugen.

Ist es nun aber nicht erst nöthig, zu wissen, auf welchem Boden denn überhaupt die projectivische Geometrie und die Fundamentalfläche 2ten Grades stehen?

Weiter sagt er: „Um die Entfernung zweier Puncte zu bestimmen denke ich mir dieselben durch eine gerade Linie verbunden. Dieselbe schneidet die Fundamentalfläche in 2 weiteren Puncten, welche mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss besitzen. Den mit einer willkürlichen Constante c multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichne ich als die Entfernung der beiden Puncte. Um den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen lege ich durch deren Durchschnittslinie die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bilden mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhältniss. Als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichne ich sodann den mit einer anderen willkürlichen, aber fest gewählten Constanten c' multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses". Diese Definitionen können richtig sein, aber vielleicht auch etwas unbrauchbar.

Nachdem der Verfasser das 5te Postulat von Euklides als 11tes Axiom bezeichnet hat, giebt er einen Bericht über das, was bisher die Nicht-Euklidiker geleistet haben.

„Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als 2 Rechte, und zwar um so mehr, je grösser die Fläche des Dreiecks ist. Für ein Dreieck dessen Ecken unendlich weit entfernt sind ist die Winkelsumme gleich Null. Durch einen Punct ausserhalb einer Geraden kann man 2 Parallele zu der Geraden ziehen, d. h. Linien welche die Gerade auf der einen oder anderen Seite in einem unendlich fernen Puncte schneiden. Die durch den Punct gehenden Geraden, welche zwischen den beiden Parallelen verlaufen, schneiden die gegebene

Gerade gar nicht". Herr Klein hält diese Willkür-Hypothesen ohne weiteres für richtig. Wir lassen ihn nach dem Vorbilde von Herrn Cayley die Entfernung zweier Puncte und die Neigung zweier sich schneidenden Geraden projectivisch ableiten und erwähnen nur diejenigen Resultate, auf welchen Herr Klein seine Nicht-Euklidische Geometrie aufbaut. Er hebt die schon im Alterthum bekannte Sache hervor, dass „die Unbegrenztheit des Raumes nicht auch nothwendig dessen Unendlichkeit mit sich führt". „Diese Vorstellung würde mit sich bringen, dass die Winkelsumme im Dreiecke (wie beim gewöhnlichen sphärischen Dreiecke) grösser ist als 2 Rechte und zwar in dem Maasse grösser, als das Dreieck einen grösseren Inhalt hat. Die gerade Linie würde alsdann keine unendlich fernen Puncte haben, und man könnte durch einen gegebenen Punct zu einer gegebenen Geraden überhaupt keine Parallele ziehen. Eine auf diese Vorstellungen gegründete Geometrie würde sich in ganz gleicher Weise neben die gewöhnliche Euklidische Geometrie stellen wie die von Gauss, Lobatschefsky, Bolyai. Während letztere der geraden 2 unendlich ferne Puncte ertheilt, giebt diese der geraden überhaupt keine (d. h. 2 imaginäre) unendlich ferne Puncte. Zwischen beiden steht die Euklidische Geometrie als Uebergangsfall; sie legt der Geraden 2 zusammenfallende unendlich ferne Puncte bei". Und unter dieser Willkür und Façon de parler nennt nun Herr Klein seine Nicht-Euklidische Geometrie mit drei Namen „hyberbolische, elliptische, parabolische Geometrie". —

Solche Selbsttäuschung hat man erlitten, als man anfing die Geometrie ganz und gar mit algebraischen Symbolen zu bebauen. — Apollonius, welcher keine Anwendung von negativen Zahlen hatte, bestimmte

dennoch die Kegelschnitte und die Eigenschaften derselben genau so, wie später Cartesius, durch die Einführung der negativen Zahlen. — Bellavitis hat die Kegelschnitte unter Anwendung des Symbols $i = \sqrt{-1}$ hergeleitet. U. s. w. — Giebt es zweierlei Ebenen d. h. eine Ebene der reellen und eine Ebene der imaginären Zahlen? Es giebt nur eine einzige Ebene und nur die algebraischen Symbole bieten uns zwei verschiedene Ebenen dar.

Man ist nicht gegen die algebraischen Symbole überhaupt, welche man als Kunstgriffe zur leichteren Forschung bezeichnet, aber entschieden gegen die Verwechselungen von Axiomen und Symbole. Das Princip „Der Zweck heiligt das Mittel" hat in der neuesten Zeit in den mathem. Wissenschaften eine so grosse Ausdehnung und Geltung erlangt, dass man von erleichterten Mitteln zum Studium der Mathematik eigentlich nicht reden kann. Und so spricht man gewöhnlich von Paradoxa, welche eigentlich keine solche sind, wenn man berücksichtigt, dass sie natürliche Folgen von willkürlichen Symbolen und willkürl. Verabredungen sind. —

Dass diese Klein'sche Arbeit schon bald nach dem Erscheinen keinen Beifall unter den Mathematikern gefunden habe, sagt Herr Klein selbst im Bd. 6 der Mathem. Annalen, nachdem er sich genöthigt sah, einen zweiten Aufsatz „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" zu schreiben. In demselben (p. 112) heisst es: „Zugleich mögen denn dadurch die Bedenken entfernt werden, welche mir von verschiedenen Seiten her hinsichtlich meiner früheren Arbeit geäussert worden sind". — „Die nachstehenden Untersuchungen sind wie die damaligen rein mathematischen Inhaltes. Es bleiben ihnen also durchaus die Fragen fern, welche Vortheile aus den bezüglichen

mathematischen Resultaten für die Raumanschauung oder überhaupt die Naturerkenntniss gewonnen werden können". Dieses Bekenntniss führt natürlich zu der Frage: Sollen denn diese Untersuchungen in der Luft schweben? Von den Klein'schen Arbeiten im 4 und 6 Bande der mathem. Annalen sei nichts weiter bemerkt, sondern nur, dass leider die „Bedenken" des 4 Bandes durch die neuen Bedenken des 6 Bandes nicht „entfernt werden" können. —

In Frankreich erscheint als amtlicher und eifriger Vertreter der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie, Herr Poincaré. In seiner interessanten und wichtigen Abhandlung über die Theorie des groupes fuchsiens (Acta Mathematica Bd. 1) lesen wir auf p. 6 ff. Folgendes:

Je dirai que deux figures sont congruentes, quand l'une est la transformée de l'autre par une substitution réelle. Les substitutions réelles formant un groupe, il est clair que deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles. Dans deux figures congruentes les angles homologues sont égaux.

Soit

$$z = x + y\sqrt{-1}$$
$$dz = dx + dy\sqrt{-1}$$
$$mod\ dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

On aura en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur:

$$[z, z + dz] = 1 + \frac{mod\ dz}{y}$$
$$L\,[z, z + dz] = \frac{mod\ dz}{y}$$

On voit ainsi que le logarithme népérien de $[z, z + dz]$ est proportionnel au module de dz et indépendant de son argument.

L'intégral

$$\int \frac{mod\ dz}{y}$$

prise le long d'un arc de courbe quelquonque s'appellera la L de cette courbe.

L'intégral double

$$\iint \frac{dx\ dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur d'une aire plane quelqonque sera la S de cette aire.

Je ne puis passer sous silence le lieu qui rattache les notions précédentes à la Géométrie non-euclidienne de Lobatchefsky.

Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots droit, longueur, distance, surface leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle, qui a son centre sur X, longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa L, distance de deux points la L de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur X et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa S. Supposons de plus qu'on conserve aux mots angle et cercle leur signification, mais en convenant d'appeler centre d'un cercle le point qui est à une distance constante de tous le points du cercle (d'après le sens nouveau du mot distance) et rayon du cercle cette distance constante.

Si l'on adopte ces denominations, les théorèmes de Lobatschefsky sont vrais, c'est à dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ses nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du Postulatum d'Euklide. Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, mais je ne

l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion."

Diese letzten Worte veranlassen natürlich zu keinen weiteren Diskussionen über die Meinungen des Herrn Poincaré; und er sei nur gefragt, ob er ces dénominatons, conventions, adoptions wirklich ernst als Axiomes betrachtet oder als einfache façon de parler zur Erleichterung der Forschung seiner Untersuchungen. Wenn er sie als grundlegende Axiome betrachtet, dann widerspricht er sich selbst durch seine letzten Worte.

Herr Poincaré hat eine besondere Arbeit: Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie in Bulletin de la Société Mathématique de France t. 15, 1887 erscheinen lassen. Die Einleitung dieser Arbeit scheint etwas skeptisch zu sein. Herr Poincaré hat einige Ansichten wie Apollonius, und behauptet: „La définition, la ligne droite est la plus court chemin d'un point à une autre ne peut être regardée comme indémontrable". Einen sehr anschaulichen und fasslichen aber dabei höhnischen Beweis der Definition der geraden Linie haben bekanntlich die Epicuräer gegeben. Platon hat (Men. 75 a, Parm. 137 e) auch eine anschauliche Definition für die Gerade gegeben, Εὐθύ, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ. Herr Poincaré will bis auf Riemann und Lobatschefsky von keinem anderen Nicht-Euklidiker wissen; denn er erwähnt keinen anderen. Er eröffnet den ersten Abschnitt seiner Arbeit mit den Worten: Nous n'envisageons d'abord que la géométrie à deux dimensions, ou géométrie plane. Von 3 oder höheren Dimensionen spricht er nichts. Der Titel des Abschnittes ist: Géométries quadratiques.

„Nous conaissons deja trois géométries à deux dimensions:

1°. La géométrie Euclidienne, où la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

2°. La géométrie de Riemann, où cette somme est plus grande que deux droits.

3°. La géométrie de Lobatschefsky, où elle est plus petite que deux droits.

„La géométrie de Riemann ne diffère pas, comme on le sait, de la géométrie sphérique, pourvu que l'on convienne de donner le nom de droites aux grands cercles de la sphère.“

Ist es doch nicht eine Verwechselung von geraden Linien mit Kreisperipherieen?

„Je vais commencer par généraliser cette interpretation de façon à pouvoir l'étendre à la géométrie de Lobatchefsky.

„Considerons une surface du second ordre quelconque. Nous conviendrons de donner le nom de droites aux sections planes diamétrales de cette surface et le nom de circonférences aux sections planes non diamétrales.“ Sind diese conventions wissenschaftlicher Natur? Herr Poincaré hat uns in den Acta Mathematica doch andere Conventionen vorgeschlagen; welche sind denn nun die richtigen?!

„Il y a plusieurs géométries quadratiques, car il y a plusieurs espèces de surfaces du second ordre.“ Herr Poincaré schafft also plusieurs géométries quadratiques; man braucht aber natürlich erst zu wissen, wo denn die plusieurs espèces de surfaces liegen, wenn sie nicht in der Luft schweben.

Der zweite Abschnitt der Poincaré's Arbeit ist betitelt: „Application de la Théorie des

groupes“ Er operirt nämlich jetzt rein analytisch. Die Meinung aber über eine Erzeugung der Geometrie auf rein analytischem Wege ist bereits ausgedrückt. Der dritte Abschnitt endlich trägt den Titel, Remarques diverses. Diese remarques diverses sind auch skeptisch geschrieben. —

Von neusten Nicht-euklidischen Arbeiten und Vorträgen, welche alle den Stempel der schon discutirten tragen, berichte ich natürlich nicht mehr. Nur der Ansichten des Herrn Weierstrass, welche in einem Buche von Herrn Killing „Die Nicht-euklidischen Raumformen, Leipzig 1885“ eine gewisse grosse Rolle zu spielen scheinen, sei noch gedacht.

Herr Killing nämlich erzählt uns l. c. p. 258 von einem Coordinatensystem, welches „von Herrn Weierstrass im mathematischen Seminar der Berliner Universität im Sommer 1872 mitgetheilt wurde“.

„Wir ziehen (l. c. p. 17) nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass durch einen Punkt O zwei zu einander senkrechten geraden OX und OY, und wählen zu Coordinaten eines Punktes P folgende Grössen. Ist $OP = r$, bildet OP mit der positiven Richtung von OX den Winkel φ, so setze man:

$$1)\ p = \cos\frac{r}{k},\ x = k \sin\frac{r}{k} \sin\varphi,\ y = k \sin\frac{r}{k} \cos\varphi$$

Setzt man die senkrechte von P auf OX gleich a, die auf OY gleich b, so ist

$$2)\ x = k \sin\frac{a}{k},\ y = k \sin\frac{b}{k}$$

Infolge der Gleichung 1) besteht zwischen den Grössen p, x, y die Relation:

$$3)\ k^2 p^2 + x^2 + y^2 = k^2$$

Für ein unendlich kleines, um den Nullpunkt gelegenes Gebiet wird $p = 1$, und x und y werden mit den senk-

rechten a und b identisch. Dasselbe gilt für ein verschwindendes Krümmungsmass k.

„Das angegebene Coordinatensystem wird als ein Weierstrass'sches bezeichnet, der Punkt O ist der Anfangspunkt, die Geraden OX und OY die Axen".

Man bemerkt dazu, wenn $p = 1$ wird, dann aus 1) hat man entweder $r = o$, oder $k = \infty$. Und wenn $r = o$, dann ist in 1) und 2) $x = o$, $y = o$.

Wenn $k = \infty$, was eben die Herren Weierstrass und Killing meinen, dann ergiebt sich aus 1) und 2) und 3) der Reihe nach:

$$1)\ x = \infty \cdot sin \frac{r}{\infty} \cdot sin\, \varphi,\ y = \infty \cdot sin \frac{r}{\infty} \cdot cos\, \varphi$$

$$2)\ x = \infty \cdot sin \frac{a}{\infty},\ y = \infty \cdot sin \frac{b}{\infty}$$

$$3)\ \infty^2 \cdot 1 + x^2 + y^2 = \infty^2$$ (oder nach Division durch k^2)

$$1 + \frac{x^2 + y^2}{\infty^2} = 1$$

oder nach Herren Weierstrass und Killing

$$1)\ x = a$$
$$2)\ y = b$$
$$3)\ 1 + \frac{a^2 + b^2}{\infty^2} = 1$$

Alle diese Erscheinungen sind daraus zu erklären, dass Herr Killing als Student seiner Zeit seinen Lehrer vielleicht missverstanden und die Ebene mit der Kugel u. s. w. verwechselt hat.

Recapitulation.

Möge es mir zum Schlusse gestattet sein, die vorhergehende Kritik in einigen kurzen Sätzen zusammenzufassen.

1. Es giebt nur einen einzigen Raum, in welchem alle Menschen leben und denken, und in welchem eine

Klasse von Mathematikern nach eigenem Geschmack und eigener Willkür ihre besonderen Räume construirt hat und construirt. — Dass es mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten giebt, bestreitet Niemand; der Raum aber hat 3 Dimensionen.

2. Diejenigen Mathematiker, welche einen Raum durch reine Zahlen construiren, gleichen denjenigen Menschen, welche ihr Millionenvermögen im Traume construiren. — Die beiden Gebiete Arithmetik und Geometrie helfen sich einander, aber nie erzeugt das eine Gebiet das andere oder ersetzt es vollständig. Wir operiren in der anal. Geometrie z. B. mit Gleichungen, aber wir dürfen nicht vergessen, dass wir zugleich Coordinaten gebrauchen; und diese Coordinaten müssen wir erst haben.

3. Diejenigen Geometer, welche die Definition der Parallelengraden, das fünfte Postulat und den daraus folgenden Satz der Winkelsumme im geradlinigen Dreiecke fallen lassen und synthetisch eine ebene Geometrie construiren wollen, die entsprechen genau, kann man sagen, denjenigen Arithmetikern, welche das Axiom der Gleichheit fallen lassen und ihre algebraischen Probleme nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen auflösen wollen.

4. Die einzige und allgemeine Geometrie hat nur eine einzige Definition für die gerade Linie, die Ebene, den Kreis, die Kugel, u. s. w. Und sie verwechselt diese Definitionen nicht. Sie behandelt alles natürlich, was ihrem Gebiete angehört.

5. Die verschiedenen sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrien sind thatsächlich nichts weiter, als eine ganz willkürliche Façon de parler ohne wissenschaftliche Bürgschaft und Ueberzeugung.